

	Facultad de Ingeniería Mexicali	Ciclo Escolar: 2021-2	
	Material Didáctico Electricidad y Magnetismo	Formación Básica	
	Unidad 4, Campo Magnético	Pág. 1 de 13	

Estado del documento:	Nuevo		Modificación	X	
-----------------------	-------	--	--------------	---	--

ELABORÓ	REVISÓ	AUTORIZÓ	AUTORIZÓ
			
Dra. Mónica Isabel Soto Tapiz	Dr. Juan Carlos Quiroz Sanchez	Dr. Moisés Jesús Castro Toscano	Dra. Wendolyn Elizabeth Aguilar Salinas
Profesora	Profesor	Encargado de la Materia	Coordinador del área Tronco Común

Control de cambios del documento			
Revisión	Ciclo Escolar	Autor de quien elaboro	Descripción o motivo del cambio
0	2020-2	Dra. Mónica Isabel Soto Tapiz	Primera Versión de Paquete Didáctico
1	2021-2	Dra. Mónica Isabel Soto Tapiz	Adecuar Material Didáctico al nuevo formato



4.4 INDUCCIÓN MAGNÉTICA.

En esta sección exploraremos los efectos causados por campos magnéticos que varían con el tiempo, tomando como referencia los experimentos de Michael Faraday y Joseph Henry (Inglaterra y Estados Unidos, 1831), los cuales mostraron que es posible inducir una FEM (fuerza electromotriz) en un circuito utilizando un campo magnético variable. Los resultados de dichos experimentos sirvieron como base para enunciar una ley básica y muy importante del electromagnetismo que se conoce como Ley de Inducción de Faraday.

A. Ley de Faraday-Henry

A principios de la década de 1830, Faraday y Henry, descubrieron de forma independiente, que un campo magnético induce una corriente en un conductor, siempre que el campo magnético sea variable. Las fuerzas electromotrices y las corrientes causadas por los campos magnéticos, se llaman fem inducidas y corrientes inducidas. Al proceso se le denomina inducción magnética. Para comprender los experimentos realizados, considere lo siguiente: un bucle (espira) de alambre conectado a un amperímetro y, a una cierta distancia se encuentra una barra imantada orientada con su polo (norte o sur) apuntando hacia dicho bucle (ver Fig. 1).

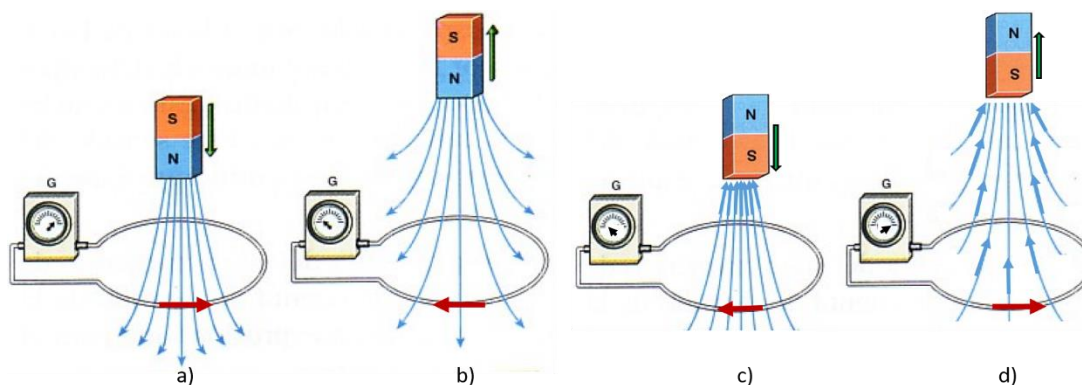


Fig. 1 Experimento de inducción magnética (1 bucle), a) imán polo norte acercándose, b) imán polo norte alejándose, c) imán polo sur acercándose, d) imán polo sur alejándose

Observe que, mientras el imán permanece estacionario, no circula corriente por el bucle; sin embargo, si:

- el polo norte del imán se mueve hacia él (Fig. 1a), por el bucle fluye una corriente en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, como indica la corriente positiva en el amperímetro
- el polo norte del imán apunta hacia el bucle y luego el imán se aleja de él (Fig. 1b), se induce en el bucle una corriente negativa en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, como indica el medidor
- el imán se invierte de modo que el polo sur apunte hacia el bucle (Fig. 1c) y se mueva hacia él, por éste circula corriente en dirección opuesta



- el polo sur del imán apunta hacia el bucle y luego el imán se aleja de él (Fig. 1d), una corriente positiva se induce en el bucle

Los resultados antes ilustrados pueden repetirse al mantener estacionario el imán y moviendo el bucle. Por ejemplo, con la disposición que muestra la Fig. 1a, si la espira se mueve hacia el imán estacionario, en ella circula una corriente positiva; y si se aleja, dicha corriente fluye en sentido opuesto (ver Fig. 2). Efectos semejantes pueden observarse al usar dos bucles conductores.

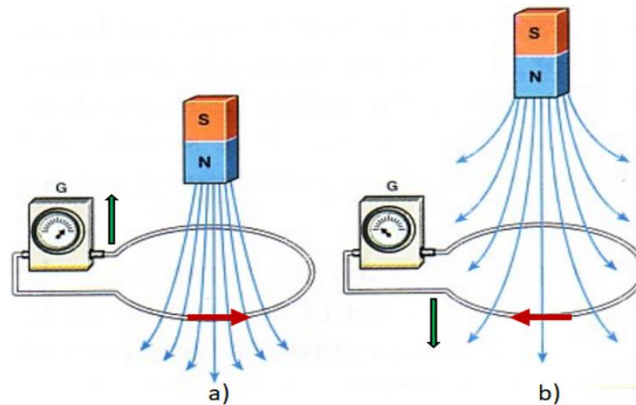


Fig. 2 Experimento de inducción magnética (1 bucle), a) imán estacionario con bucle acercándose hacia el polo norte, b) imán estacionario con bucle alejándose del polo norte

Los experimentos mostrados anteriormente predicen la inducción de una FEM en el bucle cuando el flujo magnético a través de la espira cambia con el tiempo. Como esta fuerza motriz es el trabajo realizado por unidad de carga, la integral de línea del campo eléctrico alrededor de un circuito completo coincide entonces con la FEM del circuito. En general, la FEM es directamente proporcional a la rapidez de cambio con el tiempo del flujo magnético a través del bucle. Este hecho, puede ser escrito matemáticamente como Ley de Inducción de Faraday:

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (4.4.1)$$

Para una espira de N vueltas se cumple que:

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (4.4.2)$$

Suponga ahora que un bucle que se encuentra en un campo magnético uniforme B, encierra una superficie A (ver Fig. 3). El flujo magnético a través de la espira es igual a “BA cos(θ)”; por esto, la FEM inducida puede expresarse como:



$$\varepsilon = - \frac{d[BA\cos(\theta)]}{dt} \quad (4.4.3)$$

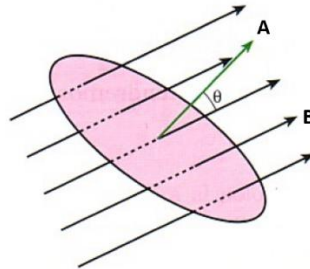


Fig. 3 Representación de una espira circular con área A, que describe el ángulo θ respecto al campo magnético B

A partir de esta expresión observe que una FEM puede ser inducida en el circuito de varias formas, si:

- la magnitud de B cambia con el tiempo
- el área encerrada por la espira cambia con el tiempo
- el ángulo θ existente entre B y la normal a la espira puede cambiar con el tiempo

Lo cual implica que, si el trabajo por unidad de carga es la FEM, entonces, la diferencia de potencial inducida en el bucle puede expresarse como la rapidez de cambio del flujo magnético a través de tiempo; así la ecuación 4.4.1 se rescribe como:

$$\Delta V_{ind} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (4.4.4)$$

B. Ley de Lenz

La ley de Faraday indica que la FEM inducida y el cambio en el flujo tienen signos algebraicos opuestos. Lo anterior tiene una interpretación física muy real que ha llegado a ser conocida como Ley de Lenz y constituye una regla para determinar la dirección de una corriente inducida en un bucle. Una corriente inducida tiene una dirección tal que el campo magnético debido a la corriente inducida se opone al cambio en el flujo magnético que induce la corriente. La dirección de la corriente inducida puede usarse para determinar las ubicaciones de mayor y menor potencial.

Retomemos la situación física mostrada en la Fig. 2 (recuerde que el imán está fijo) y apliquemos la ley de Lenz (ver Fig. 4). En este caso, las líneas de campo magnético apuntan alejándose del polo norte del imán.

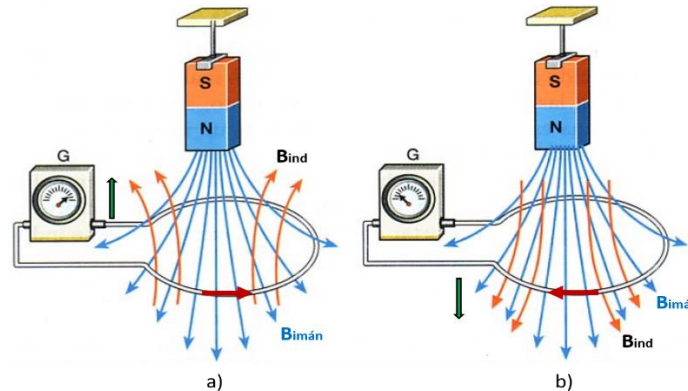


Fig. 4 Corriente inducida en un bucle que se acerca y aleja del polo norte de un imán estacionario, a) campo magnético inducido en contra del campo del imán, b) campo magnético inducido a favor del campo del imán

Observe que, mientras el imán permanece estacionario, las corrientes inducidas en el circuito al mover el bucle hacia arriba y hacia abajo, se producen en un sentido tal que con sus efectos magnéticos tienden a oponerse a la causa que los originó. Es decir, si:

- el bucle se aproxima al polo norte del imán (Fig. 4a), dicha corriente inducida circulará ejerciendo una acción magnética repulsiva sobre el imán, la cual es preciso vencer para que se mantenga el fenómeno de inducción
- el bucle se aleja del polo norte del imán (Fig. 4b), el sentido de circulación de la corriente inducida ejerciendo una acción magnética atractiva sobre el imán que se oponga a la separación de ambos

C. Ejemplos

1.- Una fuente de energía se conecta al bucle 1 y a un amperímetro, el bucle 2 está próximo al bucle 1 y está conectado a un voltímetro (ver Fig. 5). Si la corriente I por el bucle 1 se representa gráficamente como una función del tiempo, t , ¿Cuál gráfica describe mejor la diferencia de potencial inducida, ΔV_{ind} , en el bucle 2 como una función del tiempo?

Solución: de acuerdo al análisis realizado en el experimento de inducción magnética se tiene,

- una corriente creciente en el bucle 1, induce una corriente en dirección opuesta en el bucle 2
- si por el bucle 1 circula una corriente constante, no se induce ninguna corriente en el bucle 2
- una corriente decreciente en el bucle 1, induce una corriente en el bucle 2 que tiene la misma dirección que la que circula por el bucle 1

De lo anterior se concluye que la gráfica que describe el comportamiento de la FEM inducida es la #4 (inciso d).

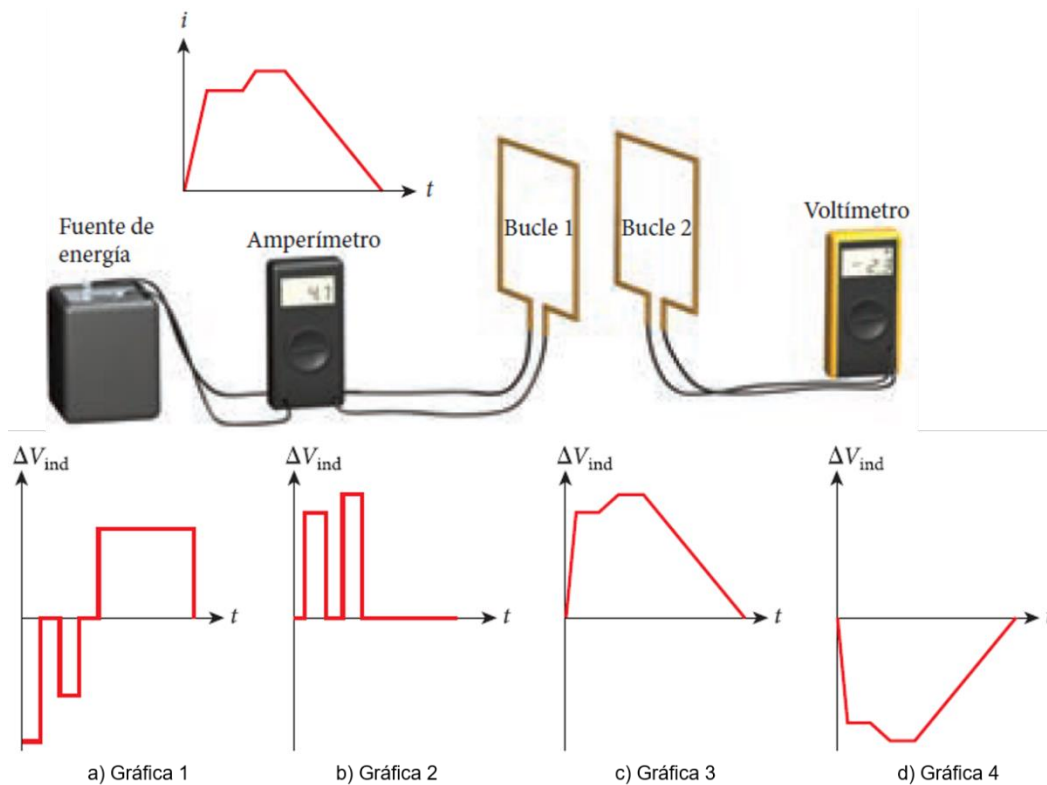


Fig. 5 Arreglo de dos bucles paralelos

2.- Para monitorear la respiración de un paciente de hospital, un cinturón delgado (bobina de 200 vueltas) se ciñe alrededor del pecho del paciente, de manera que cuando el paciente inhala, el área encerrada por la bobina aumenta en 39.0 cm^2 . Si la magnitud del campo magnético terrestre que forma un ángulo de 28.0° con el plano de la bobina es de $50.0 \mu\text{T}$, y si se supone que un paciente tarda 1.80 s en inhalar; encuentre la FEM inducida promedio en la bobina durante este intervalo de tiempo.

Solución: de acuerdo a la Ec. 4.4.3 se tiene,

$$\varepsilon = -N \frac{[B_{\text{terrestre}} A_{\text{cinturón}} \cos(\theta)]}{t_{\text{inhalar}}} = - \frac{(200 \text{ vueltas})(50 * 10^{-6} \text{ T})(3.9 * 10^{-3} \text{ m}^2) \cos(28^\circ)}{1.8 \text{ s}}$$

$$|\varepsilon| = 19.13 * 10^{-6} \text{ V} \approx 19 \mu\text{V}$$

3.- Una bobina cuadrada de 18 cm de lado está constituida por 200 vueltas de alambre (ver Fig. 6). Si se establece un campo magnético uniforme en dirección perpendicular al plano de la bobina que cambia de 0.0 T a 0.5 T en 0.8 s ; ¿Cuál fue la magnitud de la FEM inducida en el conductor mientras el cambio varía?

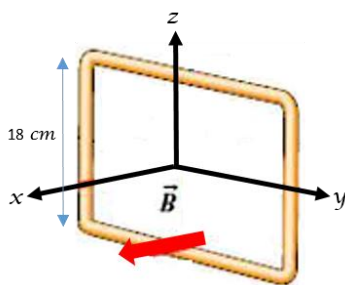


Fig. 6 Bobina en un campo magnético uniforme

Solución: de acuerdo a las Ec.'s 4.4.2 y 4.4.3 se tiene,

$$|\varepsilon| = (NA) * \left(\frac{\Delta B}{\Delta t} \right) = (NA) * \left(\frac{B_f - B_i}{\Delta t} \right) = (200 \text{ vueltas})(0.18 \text{ m})^2 \frac{(0.5 - 0.0) \text{ T}}{(0.8 \text{ s})} = 4.05 \text{ V}$$

Ojo: ¿Qué pasaría si también se pidiera determinada la magnitud de la corriente inducida en la bobina mientras el campo varía?

Para responder a esta pregunta deberemos considerar las siguientes opciones:

- la bobina no está conectada a un circuito externo, con lo cual la corriente de inducción es nula, lo anterior debido a que no existe movimiento de cargas en los puntos extremos del conductor
- la bobina está conectada a un circuito externo mediante una fuente de alimentación, de esta manera es posible calcular el valor de la corriente de inducción a través de la Ec. de Ohm. Para tal efecto, consideremos por ejemplo que el circuito externo posee una resistencia de 2Ω , entonces la corriente en el alambre es,

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{4.05 \text{ V}}{2 \Omega} = 2.025 \text{ A}$$

4.- Una espira rectangular de área A se coloca en una región donde el campo magnético es perpendicular al plano de la espira. Se le permite al campo variar su magnitud en el tiempo, según la expresión $B = B_{\text{máx}} e^{-t/\tau}$ donde tanto $B_{\text{máx}}$ como τ son constantes. El campo tiene para $t < 0$ un valor constante $B_{\text{máx}}$.

a) Utilice la ley de Faraday para demostrar que la FEM inducida en la espira se conoce por

$$\varepsilon = \frac{AB_{\text{máx}}}{\tau} e^{-t/\tau}$$



b) Obtenga un valor numérico para ε en $t = 4.00 \text{ s}$ cuando $A = 0.160 \text{ m}^2$, $B_{\text{máx}} = 0.350 \text{ T}$ y $\tau = 2.00 \text{ s}$

c) Para los valores de A , $B_{\text{máx}}$ y τ del inciso anterior, ¿cuál es el valor máximo de ε ?

Solución: a) de acuerdo a la Ec. 4.4.1 se tiene,

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -AB_{\text{máx}} * \frac{d\left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}{dt} = -AB_{\text{máx}}e^{-\frac{t}{\tau}}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{AB_{\text{máx}}}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ LQDD}$$

b) sustituyendo los valores dados en la expresión anterior,

$$\varepsilon = \frac{(0.160 \text{ m}^2)(0.350 \text{ T})}{2.00 \text{ s}} e^{-\frac{4.00 \text{ s}}{2.00 \text{ s}}} = 3.789 * 10^{-03} \text{ V} = 3.789 \text{ mV}$$

c) para $t < 0$,

$$\varepsilon_{\text{máx}} = \frac{(0.160 \text{ m}^2)(0.350 \text{ T})}{2.00 \text{ s}} = 28 * 10^{-03} \text{ V} = 28 \text{ mV}$$

5.- Un toroide de sección transversal rectangular ($a = 2.00 \text{ cm}$ por $b = 3.00 \text{ cm}$) y de radio interno $R = 4.00 \text{ cm}$ está formado por 500 vueltas de alambre que conducen una corriente $I = I_{\text{máx}}\sin(\omega t)$, con $I_{\text{máx}} = 50.0 \text{ A}$ y una frecuencia $f = \frac{\omega}{2\pi} = 60 \text{ Hz}$. Si una bobina con 20 vueltas de alambre está acoplada con el toroide (ver Fig. 7), determine la FEM inducida en la bobina en función del tiempo.

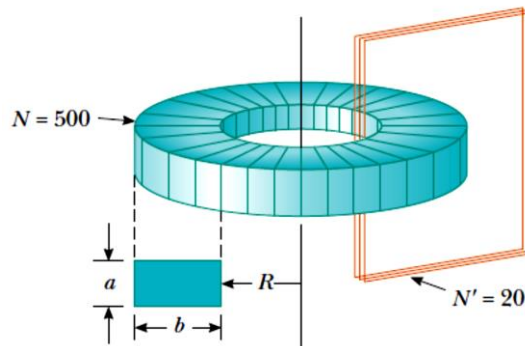


Fig. 7 Bobina conductora de 20 vueltas acoplada a un toroide de 500 vueltas de alambre

Solución: De acuerdo a la Ley de Ampere, el campo creado por un toroide es,

$$B_{\text{toroide}} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi \left(R + \frac{b}{2}\right)} \rightarrow \varepsilon_{\text{bobina}} = - \left[50N \cdot \frac{\mu_0 N(a * b)}{2\pi \left(R + \frac{b}{2}\right)} \right] * \frac{d[\sin(\omega t)]}{dt} \rightarrow$$



$$\varepsilon_{bobina} = -50 \frac{\mu_0 N' N (a * b) \omega}{2\pi \left(R + \frac{b}{2}\right)} \cos(\omega t)$$

Sustituyendo los valores dados, la FEM inducida toma el siguiente valor,

$$\varepsilon_{bobina} = -50A \frac{\left(4\pi * 10^{-07} \frac{T \cdot m}{A}\right) (20vueltas)(500vueltas)(6 * 10^{-04} m^2) \left(120\pi \frac{rad}{s}\right)}{2\pi \left(0.04 + \frac{0.03}{2}\right) m^2} \cos\left(120\pi \frac{rad}{s} t\right) \rightarrow$$

$$|\varepsilon_{bobina}| = 0.411 V \cdot \cos\left(120\pi \frac{rad}{s} t\right)$$

6.- Una barra conductora es jalada horizontalmente por una fuerza constante de magnitud $F = 5.00 \text{ N}$, a lo largo de un conjunto de rieles conductores separados por una distancia $a = 0.500 \text{ m}$ (ver Fig. 8). Los dos rieles están conectados y entre la barra y los rieles no hay fricción. Un campo magnético uniforme de magnitud $B = 0.500 \text{ T}$ está dirigido hacia la página. La barra se mueve a velocidad constante, $v = 5.00 \frac{m}{s}$. ¿Cuál es la magnitud de la diferencia de potencial en el bucle creada por los rieles conectados y la barra deslizable?

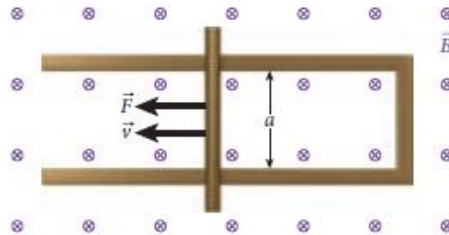


Fig. 8 Barra conductora inmersa en un campo magnético uniforme

Solución: de acuerdo a las Ec.'s 4.4.3 y 4.4.4 se tiene,

$$\Delta V_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d[B A \cos(\theta)]}{dt} = -B \cos(\theta) \frac{dA}{dt}, \text{ con } A(t) = A_0 + a(vt) \rightarrow$$

$$\Delta V_{ind} = -B \cdot a(v)$$

Ahora, sustituyendo los valores dados,

$$|\Delta V_{ind}| = (0.500 \text{ T})(0.500 \text{ m}) \left(5.00 \frac{m}{s}\right) = 1.25 \text{ V}$$



7.- Un largo solenoide de radio R tiene n vueltas de alambre por cada unidad de longitud y porta una corriente variable en el tiempo que varía sinusoidalmente como $I = I_{m\acute{a}x} \cos(\omega t)$, donde $I_{m\acute{a}x}$ es la máxima corriente y ω es la frecuencia angular de la fuente de corriente alternante (ver Fig. 9). Determine:

- la magnitud de campo eléctrico inducido en el exterior del solenoide a una distancia $r > R$ desde su eje central largo
- ¿cuál es la magnitud del campo eléctrico inducido dentro del solenoide, a una distancia r desde su eje?

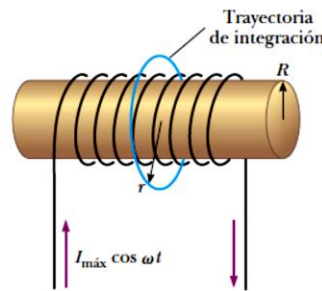


Fig. 9 Barra conductora inmersa en un campo magnético uniforme

Solución: a) de acuerdo a la Ley de Ampere, el campo creado por un solenoide es,

$$B_{\text{solenoides}} = \frac{\mu_0 N I}{l} = \mu_0 n I = \mu_0 n I_{m\acute{a}x} \cos(\omega t)$$

Y, de la Ec. 4.4.1,

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(B\pi R^2)}{dt} = -\pi R^2 \frac{dB_{\text{solenoides}}}{dt} = -\pi R^2 \mu_0 n I_{m\acute{a}x} \frac{d[\cos(\omega t)]}{dt} \rightarrow \\ &-\frac{d\Phi_B}{dt} = \pi R^2 \mu_0 n I_{m\acute{a}x} \omega \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Como,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = E(2\pi r) \rightarrow E(2\pi r) = \pi R^2 \mu_0 n I_{m\acute{a}x} \omega \sin(\omega t) \rightarrow$$

$$E = \frac{\mu_0 n I_{m\acute{a}x} \omega R^2}{2r} \sin(\omega t), \text{ para } r > R$$

b) para un punto interior ($r < R$), el flujo magnético a través de una espira de integración se conoce por ser $\Phi_B = B\pi r^2$, de aquí que,

$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(B\pi r^2)}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB_{\text{espira de integración}}}{dt} = \pi r^2 \mu_0 n I_{m\acute{a}x} \omega \sin(\omega t) \therefore$$



$$E = \frac{\mu_0 n I_{\text{máx}} \omega r}{2} \text{sen}(\omega t)$$

Este resultado muestra que la amplitud del campo eléctrico inducido dentro del solenoide debido al flujo magnético cambiante a través de él, aumenta linealmente con r y varía sinusoidalmente con el tiempo.

8.- Por un solenoide ideal circula una corriente de 600 mA , originando un campo magnético de 0.025 T de manera que la corriente aumenta con el tiempo, t , según $I(t) = I_0[1 + (2.4 \text{ s}^{-2})t^2]$. Si una bobina circular de radio 3.400 cm con 200 vueltas de alambre está adentro del solenoide con su vector normal paralelo al campo magnético (ver Fig. 10), ¿cuál es la diferencia de potencial inducida en la bobina en $t = 2.00 \text{ s}$?

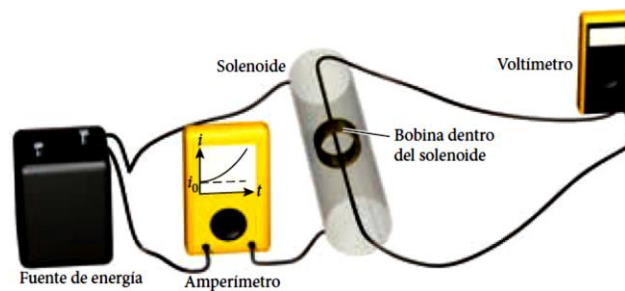


Fig. 10 Barra conductora inmersa en un campo magnético uniforme

Solución: de acuerdo a la Ley de Ampere, el campo creado por un solenoide es,

$$B_{\text{solenoid}} = \frac{\mu_0 N I}{l} = \mu_0 n I = \mu_0 n I_0 [1 + (2.4 \text{ s}^{-2})t^2] = B_0 [1 + (2.4 \text{ s}^{-2})t^2]$$

$$\text{con } A = N\pi R^2 = (200\pi)(0.034 \text{ m})^2 = 0.726 \text{ m}^2$$

Y, de las Ec.'s 4.4.3 y 4.4.4 se tiene,

$$\Delta V_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -A \cos(\theta) \frac{dB}{dt} = -AB_0 [2(2.4 \text{ s}^{-2})t]$$

Ahora, sustituyendo los valores dados,

$$\Delta V_{\text{ind}} = -(0.726 \text{ m}^2)(0.025 \text{ T})[2(2.4 \text{ s}^{-2})](2.00 \text{ s}) = -0.174 \text{ V}$$



9.- Una espira de alambre que encierra un área A se coloca en una región donde el campo magnético es perpendicular al plano de la espira y varía en el tiempo de acuerdo con la expresión $B = B_{\text{máx}}e^{-at}$ (ver Fig. 11). Encuentre la FEM inducida en la espira como función del tiempo.

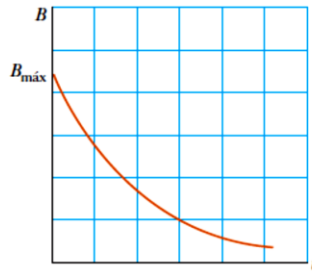


Fig. 11 Comportamiento del campo en función del tiempo

Solución: de acuerdo a la Ec. 4.4.3 se tiene,

$$\varepsilon = -\frac{d[BA\cos(\theta)]}{dt} = -\frac{d(AB_{\text{máx}}e^{-at})}{dt} = -AB_{\text{máx}} * \frac{d(e^{-at})}{dt} = aAB_{\text{máx}}e^{-at}$$

- de lo anterior concluimos que la FEM máxima se presenta para $t = 0$, donde $\varepsilon_{\text{máx}} = aAB_{\text{máx}}$ y decrece conforme pasa el tiempo

10.- En la Fig. 12, el imán de barra se mueve hacia la espira, responda, ¿El valor $(V_a - V_b)$ es positivo, negativo o cero? Explique su razonamiento.

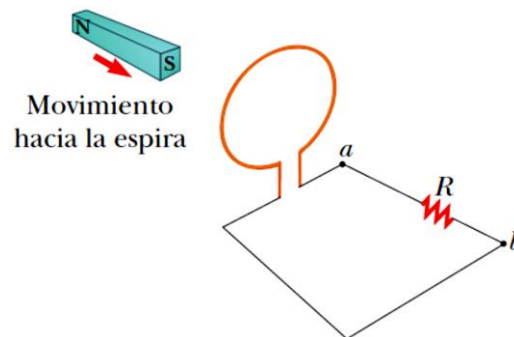


Fig. 12 Polo sur de un imán de barra acercándose hacia una espira circular

Solución: de acuerdo a la Ley de Lenz se tiene,

- conforme el imán se acerca a la espira, el flujo magnético aumenta con el tiempo de manera tal que la corriente inducida se dirige en sentido antihorario y pasa primero por el punto b antes de llegar al punto a , en consecuencia $V_a < V_b \rightarrow (V_a - V_b) < 0$

	Facultad de Ingeniería Mexicali	Ciclo Escolar: 2021-2	 Facultad de Ingeniería Mexicali
	Material Didáctico Electricidad y Magnetismo	Formación Básica	
	Unidad 4, Campo Magnético	Pág. 13 de 13	

Referencias Bibliográficas

- [1] Serway, R. A., & Jewett, J. W. Jr. (2016). *Física para Ciencias e Ingeniería*. Vol. 2. Novena Edición. México: Cengage Learning.
- [2] Wolfgang, B., & Westfall, G. D. (2014). *Física para Ingeniería y Ciencias con Física Moderna*. Volumen 2 (2a. ed.). México: McGraw-Hill.
- [3] Ohanian, H. C., & Market, J. T. (2009). *Física para ingeniería y ciencias*. Ciudad de México: McGraw Hill. [Clásica]
- [4] Resnick, R., Halliday, D., & Krane, K. S. (2002). *Física Volumen 2*. México: CECSA. [Clásica]