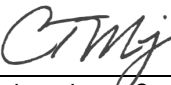


	Facultad de Ingeniería Mexicali	Ciclo Escolar: 2021-2	
	Material Didáctico Electricidad y Magnetismo	Formación Básica	
	Unidad 4, Campo Magnético	Pág. 1 de 9	

Estado del documento:	Nuevo		Modificación	X	
-----------------------	-------	--	--------------	---	--

ELABORÓ	REVISÓ	AUTORIZÓ
		
Dr. Juan Carlos Quiroz Sánchez	Dr. Moises Jesus Castro Toscano	Dra. Wendolyn Elizabeth Aguilar Salinas
Profesor	Profesor-Investigador	Coordinador del área Tronco Común

Control de cambios del documento			
Revisión	Ciclo Escolar	Autor de quien elaboro	Descripción o motivo del cambio
0	2020-2	Ana Elsi Sarabia Bastidas	Primera Versión de Paquete Didáctico
1	2021-2	Dr. Juan Carlos Quiroz Sánchez	Adecuar Material Didáctico al nuevo formato



4.3 LEY DE BIOT-SAVART

Ya se miró en un tema anterior la fuerza que se ejerce sobre una partícula cargada en movimiento dentro de un campo magnético. La ley de Biot-Savart se utiliza para calcular el campo magnético que hay en algún punto del espacio P , un pequeño elemento de corriente, utilizaremos el principio de superposición se calcula el campo magnético total producido por diferentes distribuciones de corriente.

4.3.1 Ley de Biot-Savart

Jean Baptiste Biot (1774-1862) y Félix Savart (1791-1841) llegaron a una expresión matemática que da el valor del campo magnético en algún punto del espacio, en función de la corriente que dicho campo produce.

Esta ley establece que si un alambre conduce una corriente estable I figura 1, el campo magnético $d\vec{B}$ en un punto P asociado a un elemento del alambre $d\vec{s}$ tiene las siguientes propiedades:

1. El vector $d\vec{B}$ es perpendicular tanto a $d\vec{s}$ (vector que tiene las unidades de longitud y está en la dirección de la corriente) como a $\hat{r}$ (vector unitario de posición), dirigido desde $d\vec{s}$ hacia P .
2. La magnitud de $d\vec{B}$ es inversamente proporcional a r^2 , donde r es la distancia entre $d\vec{s}$ y P .
3. La magnitud de $d\vec{B}$ es proporcional a la corriente y a la longitud $d\vec{s}$ del elemento.
4. La magnitud de $d\vec{B}$ es proporcional al $\sin \theta$, donde θ es el ángulo entre los vectores $d\vec{s}$ y $\hat{r}$.

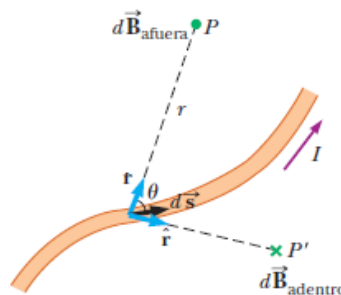


Fig 1. El campo magnético $d\vec{B}$ en un punto debido a la corriente I que pasa a través de un elemento de longitud $d\vec{s}$ está definido por la ley de Biot-Savart. La dirección de campo es hacia afuera de la página en P y hacia adentro de la página en P' .



Matemáticamente estas propiedades se resumen en la ecuación (1) y es conocida hoy en día como la **ley de Biot-Savart**.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \quad (1)$$

Este diferencial de campo es creado por un solo elemento pequeño de longitud $d\vec{s}$ del conductor.

Para encontrar el campo magnético total $\vec{B}$ creado en algún punto por un conductor de tamaño finito se integra la ecuación (1) y entonces

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \quad (2)$$

Donde la integral se evalúa sobre todo el conductor.

4.3.2 Cálculo de algunos campos utilizando la Ley de Biot-Savart

Campo magnético alrededor de un conductor recto delgado

Considere un alambre recto delgado que porta una corriente constante I y está colocado a lo largo del eje x , como se muestra en la figura 2. Determine la magnitud y dirección del campo magnético en el punto P debido a esta corriente.

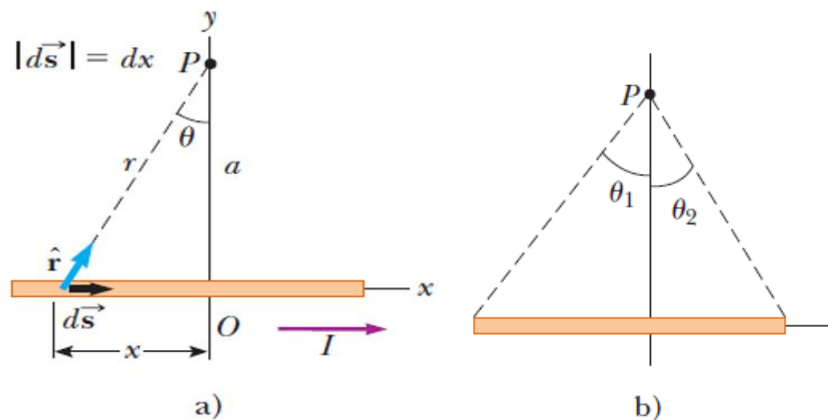


Fig. 2. a) Un alambre recto delgado que porta una corriente I . El campo magnético en el punto P debido a la corriente en cada elemento $d\vec{s}$ del alambre es hacia afuera de la página, así que el campo neto en el punto P también es hacia afuera de la página. b) Se aplican los ángulos θ_1 y θ_2 para determinar el campo neto.

Consideramos un elemento de longitud $d\vec{s}$ que se encuentra a una distancia r del punto P . La dirección del campo magnético en este punto es hacia afuera de la página. Todos los elementos $I d\vec{s}$ producen un campo magnético dirigido afuera de la página, por lo tanto si ya sabemos la dirección del campo nos falta encontrar la magnitud de él. Colocamos el origen en O y el punto P a lo largo del eje positivo y , con $\hat{k}$ como vector unitario que apunta hacia afuera de la página.

Realizamos el producto cruz de la ecuación (1)



$$d\vec{s} \times \hat{r} = ds (1) \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \hat{k} = ds \cos \theta \hat{k} \quad (3)$$

Como el conductor yace en el eje x, también podemos decir que $ds = dx$, y como $x = -a \tan \theta$, como se observa en la figura 2a. entonces diferenciamos para encontrar dx ,

$$dx = -a \sec^2 \theta d\theta = -\frac{ad\theta}{\cos^2 \theta} \text{ Sustituimos está ecuación en la ecuación (3)}$$

$$d\vec{s} \times \hat{r} = ds \cos \theta \hat{k} = -\frac{ad\theta}{\cos^2 \theta} \cos \theta \hat{k} \quad (4)$$

Y

$$r = \frac{a}{\cos \theta} \quad (5)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4) y (5) en la magnitud de la ecuación (1)

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\left(-\frac{ad\theta}{\cos^2 \theta} \cos \theta \right)}{\left(\frac{a}{\cos \theta} \right)^2} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\left(\frac{ad\theta \cos \theta}{\cos^2 \theta} \right)}{\frac{a^2}{\cos^2 \theta}} = -\frac{\mu_0 I \cos \theta d\theta}{4\pi a}$$

$$dB = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos \theta d\theta \quad (6)$$

Integramos la ecuación (6) sobre todos los elementos de longitud del alambre, desde θ_1 a θ_2 , como está definido en la figura 2b. y se obtiene la ecuación (7) para encontrar el campo magnético de cualquier alambre recto portador de corriente.

$$B = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) \quad (7)$$

Si el alambre es recto e infinitamente largo tal que $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ y $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$, entonces: $\sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = 2$

La ecuación (7) se representa como

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (8)$$



Campo magnético debido a un segmento de alambre curvo

Calcule el campo magnético en un punto O para el segmento de alambre que se muestra en la figura 3. El alambre se compone de dos partes rectas y de un arco circular de radio a , el cual subtende un ángulo θ .

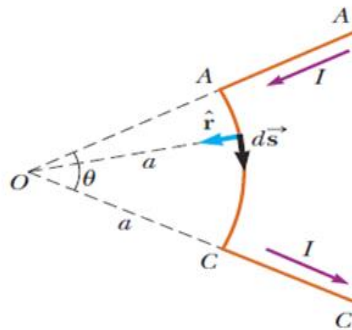


Fig 3. El campo magnético en O debido a la corriente en el segmento curvo AC es hacia la página. La aportación al campo en O debida a la corriente en los dos segmentos rectos es cero. La longitud del segmento curvo AC es s .

El campo magnético en O es debido a la corriente en el segmento AA' más a la corriente en el segmento AC más a la corriente en el segmento CC' . Se observa que la corriente en los segmentos rectos AA' y CC' , $d\vec{s}$ es paralelo a $\hat{r}$ a lo largo de estas trayectorias. Entonces el producto cruz es cero $d\vec{s} \times \hat{r} = 0$ por ende el campo magnético debido a estas trayectorias es cero. Entonces aplicamos la ley de Biot-Savart al segmento curvo AC .

Primero cada elemento de longitud $d\vec{s}$ a lo largo de esta trayectoria está a la misma distancia a desde O .

Segundo el campo magnético está dirigido hacia la página en dicho punto.

Tercero en cada punto sobre AC , $d\vec{s}$ y $\hat{r}$, los que nos da $d\vec{s} \times \hat{r} = ds * (1) \sin 90 = ds$

$$d\vec{s} \times \hat{r} = ds \quad (9)$$

Sustituimos la ecuación (9) en la ecuación (1)

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I ds}{4\pi a^2} \quad (10)$$

Para obtener el campo integramos la ecuación (10) recuerde que la corriente I y la distancia a son constantes, las sacamos de la integral. $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \int ds = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} s$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} s \quad (11)$$

Geométricamente $s = a\theta$, sustituimos en la ecuación (11) $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} a\theta$



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \theta \quad (12)$$

Con dirección hacia la página.

Campo magnético sobre el eje de un lazo de corriente circular

Considere un lazo circular de radio a localizado en el plano yz que conduce una corriente estable I , como se ve en la figura 4. Calcule el campo magnético en un punto axial P a una distancia x del centro de lazo.

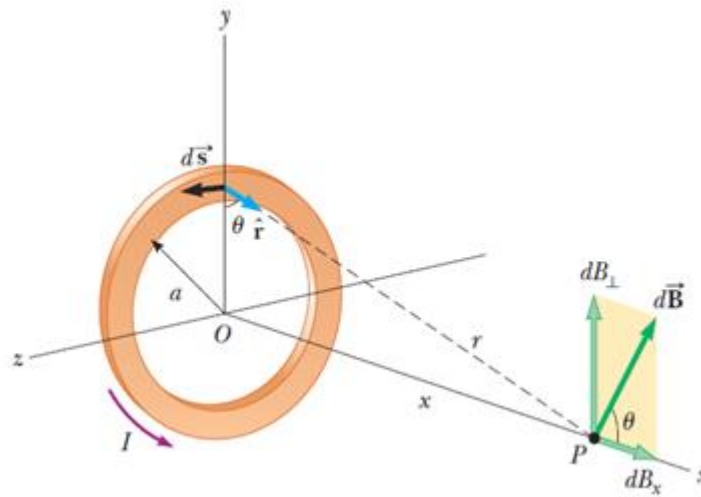


Fig. 4. Geometría para calcular el campo magnético en un punto P que se encuentra sobre el eje de una espira de corriente. Por simetría, el campo total $\vec{B}$ es a lo largo del eje.

En la figura 4 se observa la aportación del campo magnético en el punto P debido a un solo elemento de corriente en lo alto del anillo, en la parte baja de la espira hay una aportación de campo magnético de un elemento de corriente que por simetría las componentes perpendiculares del campo debido a estas dos partes se cancelan. Esta cancelación ocurre para todas los pares de segmentos alrededor del anillo por lo que solo tomaremos en cuenta las componentes paralelas y simplemente las sumamos.

$d\vec{s}$ y $\hat{r}$ son perpendiculares entonces $\vec{s} \times \hat{r} = ds * (1) \sin 90 = ds$

$$d\vec{s} \times \hat{r} = ds$$

Cada elemento de longitud $d\vec{s}$ alrededor de la espira están a la misma distancia r del punto P

$$r^2 = a^2 + x^2 \quad (13)$$

Sustituyendo las ecuaciones (13) y (9) en la ecuación (1)



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{s}}{(a^2 + x^2)}$$

Buscamos solo el elemento en x . $d\vec{B}_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{s}}{(a^2 + x^2)} \cos \theta$ Integramos

$$B_x = \oint d\vec{B}_x = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{s}}{(a^2 + x^2)} \cos \theta$$

$$B_x = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{s}}{(a^2 + x^2)} \cos \theta \quad (14)$$

Y como el

$$\cos \theta = \frac{a}{(a^2 + x^2)^{1/2}} \quad (15)$$

Sacamos las constantes de la integral y sustituimos la ecuación (15) en la ecuación (14)

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \oint \frac{ds}{(a^2 + x^2)} * \frac{1}{(a^2 + x^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \oint \frac{ds}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi (a^2 + x^2)^{3/2}} \oint ds \\ &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi (a^2 + x^2)^{3/2}} s \end{aligned}$$

Como la superficie es una circunferencia $s = 2\pi a$

$$B_x = \frac{\mu_0 I a}{4\pi (a^2 + x^2)^{3/2}} (2\pi a) \quad (16)$$

Simplificando la ecuación (16)

$$B_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (17)$$

Para encontrar el campo magnético en el centro del lazo $x = 0$, sustituimos en la ecuación (17).

$$B = \frac{\mu_0 I}{2a} \quad (18)$$

Para encontrar el campo magnético lejos del lazo en $x \gg a$

$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2x^3} \quad (19)$$



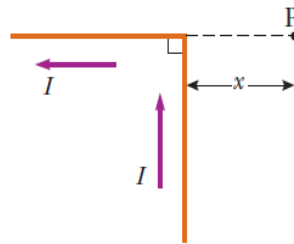
Resuelve los siguientes reactivos:

1. Un alambre en el cual hay una corriente de $5A$ se le va a dar la forma de un lazo circular de una vuelta. Si el valor requerido del campo magnético en el centro del lazo es $10\mu T$

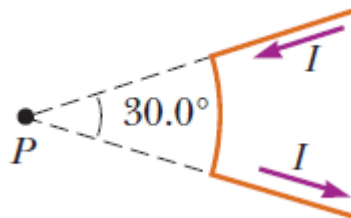
a) ¿Cuál es el radio que es necesario?

b) ¿Cuál será la magnitud del campo magnético a en un punto P a una distancia $x = 50cm$ de su centro?

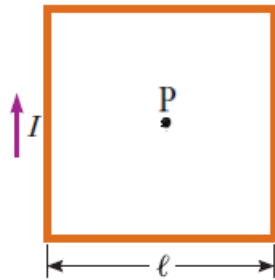
2. Determine el campo magnético en un punto P localizado a una distancia $x = 10cm$ de la esquina de un alambre infinitamente largo doblado de manera que forma un ángulo recto, como se muestra en la figura. El alambre lleva una corriente estable $I = 5A$.



3. Una trayectoria de corriente con la forma que se muestra en la figura produce un campo magnético en P , el centro del arco. Si el arco subtende un ángulo de 30.0° y el radio del arco es 0.600 m , ¿cuáles son la magnitud y la dirección del campo producido en P si la corriente es de 3.00 A ?



4. Un conductor con la forma de una espira cuadrada con un lado 0.400 m lleva una corriente $I = 10.0\text{ A}$, como se muestra en la figura. Calcule la magnitud y dirección del campo magnético en el centro del cuadro.



Referencias

- Serway, R. A., Jewett, J. W., Hernández, (2009). Física para ciencias e ingeniería. Volumen 2. Séptima edición. ISBN-13: 978-607-481-358-6. Cengage Learning.